



گزینه ۳

۱

به طور کلی می‌دانیم در مورد هر تابع وارون‌پذیری مانند h :

$$h(a) = b \Leftrightarrow h^{-1}(b) = a$$

ابتدا $g^{-1}(11)$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور کافی است معادله $g(x) = 11$ را حل کنیم:

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \xrightarrow{x \leq 0} x = -3$$

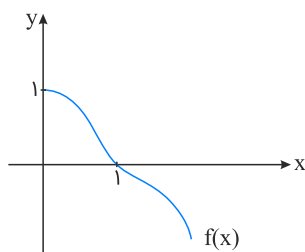
پس داریم:

$$f(2a - 5) = -3 \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(-3)}_4 = 2a - 5 \Rightarrow 4 = 2a - 5 \Rightarrow a = 4/5$$

گزینه ۱

۲

نمودار تابع f مشخص می‌کند که $R_f = (-\infty, 1]$ است و می‌دانیم $R_f = D_{f^{-1}}$ می‌باشد. برای پیدا کردن دامنه $f(x+1)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



دامنه: $x \geq 0$

دامنه تابع $y = \frac{f^{-1}(x)}{f(x+1)}$ برابر اشتراک دامنه f^{-1} و $f(x+1)$ است. به علاوه مخرج نباید صفر باشد.

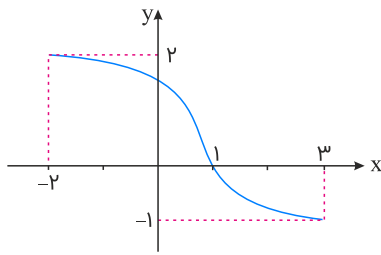
$$(-\infty, 1] \cap [0, +\infty) - \{1\} = [0, 1)$$

گزینه ۳

۳

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ تابع اولیه ما باشد، پس $2\sqrt{x-1} + 1 = 2f(x-1) + 1$. برای رسم $2f(x-1) + 1$ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال داده، سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و در نهایت کل نمودار را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم که این عوامل با یک جابه‌جایی بی‌تأثیر در گزینه "۳" دیده می‌شوند.

زیر رادیکال باید نامنفی باشد. یعنی به دنبال x هایی هستیم که $\frac{(x-2)f(x)}{x-1} \geq 0$. باتوجه به شکل نمودار واضح است که به ازای $x \in [-2, 1]$ ، $f(x) \geq 0$ و به ازای $x \in [1, 3]$ ، $f(x) \leq 0$. حال باید عبارت $\frac{(x-2)f(x)}{x-1}$ را تعیین علامت کنیم:



x	-2	1	2	3
$\frac{x-2}{x-1}$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	$+$	$+$	0	$-$

تعریف نشده

تابع در بازه $[-2, 2]$ بزرگتر یا مساوی صفر است. اما دقت کنید $x = 1$ که ریشه مخرج است قابل قبول نیست. بنابراین:

$$D_g = [-2, 2] - \{1\}$$

$$f+1 = \{(-1, 1), (1, 3), (3, 0), (4, 4)\}$$

$$\left(\frac{g-1}{f+1}\right)(-1) = \frac{2}{1} = 2, \quad \left(\frac{g-1}{f+1}\right)(1) = \frac{-2}{3}$$

$$\left(\frac{g-1}{f+1}\right)(3) = \frac{2}{0} \quad \times, \quad \left(\frac{g-1}{f+1}\right)(4) = \frac{7}{4}$$

$$\text{حاصل ضرب مقادیر برد تابع} : 2 \times \frac{-2}{3} \times \frac{7}{4} = -\frac{7}{3}$$

ابتدا از معادله جزء صحیح داده شده، محدوده x را به دست می آوریم و از آنجا تکلیف قدر مطلق موجود در تابع $f(x)$ را مشخص می کنیم:

$$[5x^2 - 1] = 5 \Rightarrow 5 \leq 5x^2 - 1 < 6 \Rightarrow 6 \leq 5x^2 < 7$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} \leq x^2 < \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{1}{1} \leq x^2 < \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم}} \sqrt{1/1} \leq |x| < \sqrt{1/4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1/1} \leq x < \sqrt{1/4} \Rightarrow x \text{ عددی بین ۱ و ۲ است.} \\ \text{یا} \\ -\sqrt{1/4} < x \leq -\sqrt{1/1} \Rightarrow x \text{ عددی بین ۲- و ۱- است.} \end{cases}$$

برای تعیین تکلیف قدر مطلق در تابع x $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x}$ داریم:

$$|x^2 - x| = |x(x - 1)| = |x||x - 1|$$

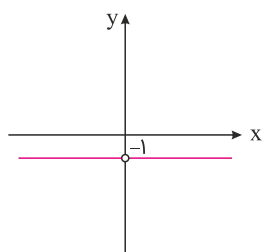
$$\xrightarrow{x \text{ عددی بین ۱ و ۲ است.}} |x^2 - x| = |x||x - 1| = x(x - 1)$$

$$\xrightarrow{x \text{ عددی بین ۲- و ۱- است.}} |x^2 - x| = |x||x - 1| = (-x)(-x + 1) = x(x - 1)$$

پس در هر دو حالت، $|x^2 - x| = x(x - 1)$ و لذا داریم:

$$f(x) = \frac{x(x - 1)}{x} - x = -1 \quad (x \neq 0)$$

واضح است که نمودار این تابع ثابت، به صورت زیر است و هرگز محور x ها را قطع نمی کند.



می دانیم $f(f^{-1}(x)) = x$ است، پس حاصل عبارت $f(f^{-1}(5))$ برابر ۵- می باشد. حال با جایگذاری $f(f^{-1}(-5)) = -5$ در تساوی داده شده، معادله را ساده تر می کنیم. داریم:

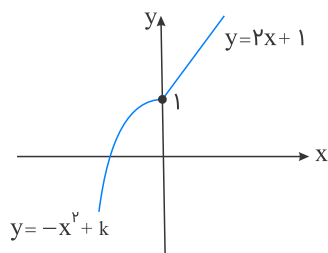
$$3g(f(a)) + \underbrace{f(f^{-1}(-5))}_{-5} = 1 \Rightarrow 3g(f(a)) = 6 \Rightarrow g(f(a)) = 2 \xrightarrow{g(x) = \sqrt{4-x}} \sqrt{4 - f(a)} = 2$$

$$\Rightarrow f(a) = 0 \xrightarrow{(3, 0) \in f} a = 3$$

باتوجه به فرض سوال داریم: $f^{-1}(f^{-1}(3)) = 0$. اگر $f^{-1}(3) = a$ ، آنگاه بررسی می‌کنیم که تابع f به ازای چه مقدار a ، خروجی ۳ می‌دهد. لذا داریم:

$$f(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + k = 3 \Rightarrow a^2 = k - 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{k-3} \end{cases}$$

اما دقت شود که چون تابع f وارون‌پذیر است؛ باید یک‌به‌یک باشد. لذا باتوجه به نمودار تابع f می‌توان گفت که $k \leq 1$ ، زیرا اگر $k > 1$ ، آنگاه تابع f دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین مقدار $\sqrt{k-3}$ تعریف نشده است و $a = \pm\sqrt{k-3}$ قابل قبول نیست. (چون زیر رادیکال منفی می‌شود)



پس فقط $a = 1$ را داریم. در ادامه داریم:

$$f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\xrightarrow{x=0} f(0) = -(0)^2 + k = 1 \Rightarrow k = 1$$

دامنه وارون تابع f همان برد f است:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + c \Rightarrow R_f = [c, +\infty)$$

سوال گفته برد f برابر $[2, +\infty)$ است، یعنی $c = 2$ می‌شود: $f(x) = \sqrt{x+1} + 2$
برای پیدا کردن نقطه برخورد نمودار f^{-1} با محور x باید معادله $f^{-1}(x) = 0$ را حل کنیم. پس کافیهست $f(0)$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 2 \xrightarrow{x=0} f(0) = 1 + 2 = 3$$

ابتدا به $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$ دقت می‌کنیم. پس اولاً اعداد ± 1 در $D_{g \circ f}$ نیستند. ثانیاً باید اعدادی مانند x را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها $f(x) = -3$ باشند. با حل معادله $\frac{1}{x^2 - 1} = -3$ داریم:

$$x^2 - 1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

پس $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 1, \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\}$ که فقط دو عدد صحیح -1 و 1 در آن نیستند.

$$f(\underbrace{2x+1}_t) = 4x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow[x=\frac{t-1}{2}]{2x+1=t} f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t-1}{2}\right) = (t-1)^2 - (t-1)$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 3t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-x) = (-x)^2 - 3x(-x) + 2 \Rightarrow f(-x) = x^2 + 3x + 2$$

برای راحتی فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^y - \frac{1}{x^y} = A \\ x^y + \frac{1}{x^y} = B \end{cases}$$

پس به $f(A) = B$ می‌رسیم. ابتدا سعی می‌کنیم A و B را به هم نزدیک کنیم. برای این منظور آن‌ها را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^y - \frac{1}{x^y} = A \Rightarrow (x^y - \frac{1}{x^y})^y = A^y \Rightarrow x^x + \frac{1}{x^x} - y = A^y \quad (1)$$

$$x^y + \frac{1}{x^y} = B \Rightarrow (x^y + \frac{1}{x^y})^y = B^y \Rightarrow x^x + \frac{1}{x^x} + y = B^y \quad (2)$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$x^x + \frac{1}{x^x} = A^y + y$$

با جایگذاری در (۲) داریم:

$$\underbrace{x^x + \frac{1}{x^x}}_{A^y + y} + y = B^y \Rightarrow B^y = A^y + 2y$$

$$\Rightarrow B = \pm \sqrt{A^y + 2y}$$

از آنجا که $B = x^y + \frac{1}{x^y}$ ، بنابراین B همواره مثبت است و فقط $B = \sqrt{A^y + 2y}$ قابل قبول می‌باشد. پس:

$$f(A) = B \Rightarrow f(A) = \sqrt{A^y + 2y}$$

$$f(x) = \sqrt{x^y + 2y} \quad \text{درواقع:}$$

قبل از اینکه به مبحث تساوی دو تابع f و g بپردازیم، به مطالب زیر در مورد هریک از این دو تابع توجه کنید:
در مورد تابع f دقت کنید که $x = 0$ در هر دو ضابطه تابع قابل جایگذاری است:

$$\begin{cases} \text{ضابطه بالا: } f(0) = -1 \\ \text{ضابطه پایین: } f(0) = m - 3 \end{cases}$$

برای آنکه شرط تابع بودن f برقرار شود، باید:

$$m - 3 = -1 \Rightarrow m = 2$$

در مورد تابع g ، باتوجه به ضابطه بالا، واضح است که فقط $x = 1$ در دامنه این ضابطه قرار ندارد، پس $k = 1$ و مطابق ضابطه پایین: $n = g(1)$
از آنجا که دو تابع f و g برابرند، پس: $g(1) = f(1)$ و مطابق با ضابطه پایین تابع f :

$$f(1) = m + 2 - 3 = m - 1 = 2 - 1 = 1$$

پس:

$$n = g(1) = f(1) = 1 \Rightarrow n = 1$$

با پارامترهای به دست آمده، ضابطه دو تابع را بازنویسی می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{x-1}{1+\underbrace{|x|}_{-x}} & ; x \leq 0 \\ 2 + 2x - 3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; x \leq 0 \\ 2x - 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax^r + bx + c}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

برای آنکه دو تابع f و g مساوی شوند، باید:

$$\frac{ax^r + bx + c}{x - 1} = 2x - 1 \Rightarrow ax^r + bx + c = (2x - 1)(x - 1)$$

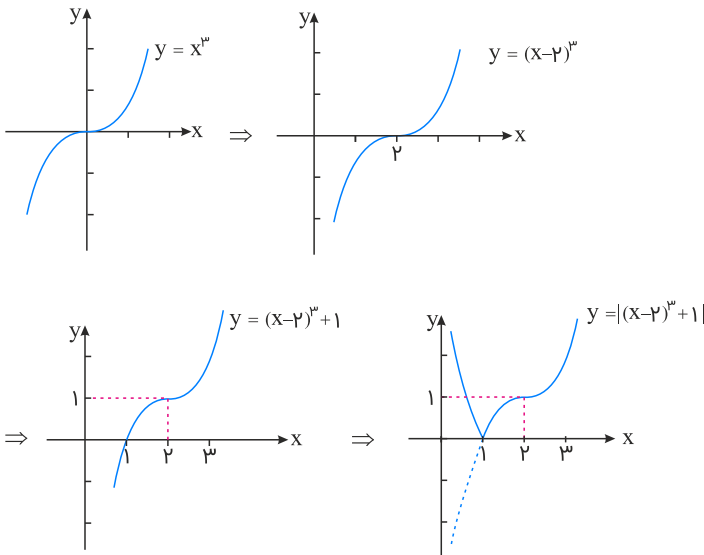
$$\Rightarrow ax^r + bx + c = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

پس:

$$a - b + c - m + n - k = 2 - (-3) + 1 - (2) + 1 - (1) = 4$$

برای اینکه بتوانیم تابع را راحت تر رسم کنیم، ابتدا تابع را به صورت مکعب کامل درمی آوریم که بتوانیم از قواعد انتقال استفاده کنیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x-2)^3 - 1 + 1$$



همان طور که ملاحظه می کنید کامل ترین بازه های که تابع $y = |f(x)|$ در آن اکیداً صعودی است بازه $(1, +\infty)$ می باشد.

ابتدا نامعادله داده شده را حل می کنیم:

$$\frac{4x^2 + 5x + 1}{|x-2|(x^2 + 2x + 1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 5x + 1}{|x-2|(x+1)^2} \leq 0$$

عبارت های $|x-2|$ و $(x+1)^2$ عبارت هایی همواره بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و به شرط توجه به ریشه های آنها ($x = -1, 2$ که عضو دامنه تابع نیستند)، می توان آنها را در تعیین علامت نادیده گرفت. پس داریم:

$$4x^2 + 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow (x+1)\left(x + \frac{1}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{x \neq -1, 2} -1 < x \leq -\frac{1}{4}$$

حال به سراغ عبارت $[x+1] + \frac{x}{|4x|}$ می رویم. اول تکلیف جزء صحیح و سپس تکلیف قدر مطلق را معلوم می کنیم:

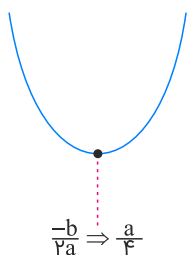
$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین را بایک جمع می کنیم}} 0 < x+1 \leq \frac{3}{4} \Rightarrow [x+1] = 0$$

$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین را در چهار ضرب می کنیم}} -4 < 4x \leq -1 \Rightarrow |4x| = -4x$$

پس داریم:

$$[x+1] + \frac{x}{|4x|} = 0 + \frac{x}{-4x} = -\frac{1}{4}$$

با توجه به نمودار این تابع درجه ۲ که در زیر کشیده شده است، این تابع در بازه‌هایی یک به یک است که رأس سهمی، یعنی $\frac{a}{4}$ در داخل بازه نباشد. پس اگر این تابع بخواهد در بازه $[-3, 2]$ یک‌به‌یک شود، باید $\frac{a}{4}$ داخل این بازه قرار نگیرد. یعنی اتفاق زیر رخ ندهد:



$$-3 < \frac{a}{4} < 2 \Rightarrow -12 < a < 8$$

پس محدوده قابل قبول، $(-12, 8) - \mathbb{R}$ می‌باشد.

ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{(x-3)(2x-1)}{x-3} \Rightarrow f(x) = 2x-1, \quad x \neq 3$$

ضابطه ساده‌شده f به ازای $x=3$ ، عدد ۵ را تولید می‌کند، پس برد f نباید شامل عدد ۵ باشد: $R_f = \mathbb{R} - \{5\}$
ضابطه وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \text{عوض کردن جای } x \text{ و } y \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

از آنجایی که دامنه f^{-1} همان برد f است، پس دامنه f^{-1} هم نباید شامل عدد ۵ باشد، پس $x-5$ را در صورت و مخرج آن ضرب می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{2(x-5)} = \frac{x^2 - 4x - 5}{2x - 10}$$

$$\Rightarrow b + c + d = -4 + (-5) + (-10) = -19$$

وقتی $1 = g^{-1}(f(3a))$ است، یعنی $f(3a) = g(1)$.

$$g(1) = \frac{1}{2} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(3a) = \frac{1}{2}$$

پس کافی است معادله $f(x) = \frac{1}{2}$ را حل کنیم:

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{1}{2}$$

نیازی به حل نیست! قابل حدس است که $x = 1$ در این تساوی صدق می‌کند. پس ورودی f برابر با ۱ است، به عبارتی:

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ببینیم هر مرحله به زبان ریاضی چه معنایی دارد و مرحله به مرحله ضابطه‌ها را مشخص کنیم:

۱- انقباض افقی ۲ واحدی: $f(2x)$

۲- قرینه نسبت به محور y : $f(-2x)$

۳- یک واحد انتقال افقی به سمت چپ: محل اشتباه اغلب همین‌جا است که شاید بگویید این مرحله $f(-2x+1)$ است. باید بدانید در نوشتن ضابطه تبدیل، هر تغییری که انجام می‌شود بر متغیر x است نه قسمت‌های دیگر. در اینجا یعنی به جای x ، باید $(x+1)$ بگذاریم. یعنی ضابطه در این مرحله $f(-2(x+1)) = f(-2x-2)$ است.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{-x}$$

$$\Rightarrow f(-2x-2) = \frac{1}{\sqrt{-2x-2+2}} + \sqrt{-(-2x-2)} = \frac{1}{\sqrt{-2x}} + \sqrt{2x+2}$$

عبارت $(2x^3 + 5)^3 = 8x^9 + 60x^6 + 30x^3 + 125$ ، یک عبارت درجه ۹ است. برای آنکه درجه کل عبارت ۶ باشد، باید حتماً جمله درجه ۹ عبارت $(2x^3 + 5)^3$ با یکی از جملات $kx(4x^4 + 2)^n$ حذف شود. پس n باید ۲ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^3 + 5)^3 + \underbrace{kx(4x^4 + 2)^2}_{16x^9 + 16x^6 + 4} \\ &= (8x^9 + 60x^6 + 30x^3 + 125) + (16kx^9 + 16kx^6 + 4kx) \\ \Rightarrow f(x) &= (8 + 16k)x^9 + 60x^6 + 16kx^6 + 30x^3 + 4kx + 125 \end{aligned}$$

برای اینکه تابع f یک چندجمله‌ای از درجه ۶ باشد، باید ضریب جمله x^9 را برابر صفر قرار دهیم تا این جمله حذف شود. داریم:

$$x^9 \text{ ضریب } 8 + 16k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow n + k = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

تابع گویا، تابعی کسری است که در صورت و مخرج کسر آن، توابع چندجمله‌ای قرار می‌گیرند (البته مخرج کسر نباید صفر باشد). و می‌دانیم در یک تابع چندجمله‌ای، درجه جملات همگی عضو اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) هستند.

در گزینه "۱"، صورت و مخرج، هر دو چندجمله‌ای از درجه ۱ هستند.

در گزینه "۲"، بعد از نوشتن $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[6]{x}$ ، باز هم صورت و مخرج هر دو، چندجمله‌ای از درجه ۱ می‌شوند.

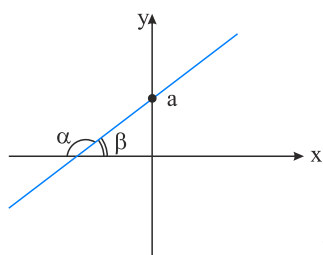
در گزینه "۳"، در صورت، یک چندجمله‌ای از درجه ۱ داریم. اما در مخرج کسر بعد از نوشتن $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{x}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{x}$ ، از آن جا که $\frac{1}{4} \notin \mathbb{W}$ پس همین گزینه جواب تست است. ضمناً دقت کنید که گزینه "۴" را می‌توان به صورت $y = \sqrt[3]{x} = \frac{x}{1}$ نوشت که در آن، هم صورت و هم مخرج، چندجمله‌ای از درجه صفر محسوب می‌شوند.

با توجه به این که دامنه تابع به صورت $\mathbb{R} - \{\pm a\}$ می‌باشد، پس $\pm a$ ریشه‌های مخرج تابع هستند، به این معنا که معادله درجه دوم $mx^2 + (m-2)x - (m+m^2) = 0$ باید دارای دو ریشه قرینه هم باشد. برای این منظور باید جمع ریشه‌ها در این معادله صفر شود:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-m+2}{m} = 0 \Rightarrow m = 2$$

پس این معادله به صورت $2x^2 - 18 = 0$ درمی‌آید و دارای دو ریشه ± 3 است. پس دامنه تابع برابر با $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$ و $a = 3$ می‌باشد.

باتوجه به نمودار، نقطه a محل تلاقی نمودار f^{-1} با محور y ها است که برای پیدا کردن آن کافی است $f^{-1}(0)$ را به دست آوریم و البته به جای آن، بهتر است معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم:



$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرف دیگر زاویه α ، زاویه بین نمودار تابع f^{-1} با جهت منفی محور x ها است. می‌دانیم که تانژانت زاویه بین این خط با جهت مثبت محور x ها همان شیب خط می‌باشد. پس:

$$\tan \beta = \text{شیب خط } f^{-1} = \frac{1}{\text{شیب خط } f} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta = -\frac{1}{3}$$

پس:

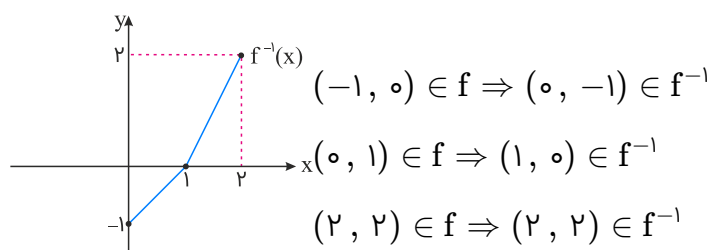
$$a \tan \alpha = 1 \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

باید ببینیم چه کارهایی روی $y = |x|$ می‌توان اعمال کرد که به تابع g تبدیل شود. در گام نخست تابع $|x|$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و بعد نمودار را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اما باید توجه داشت که چه اتفاقی رخ داده که $g(0) = -\frac{7}{3}$ شده است. قطعاً ضریب مانند a پشت $|x - 2|$ قرار داشته که این اتفاق افتاده؛ بنابراین a را به دست می‌آوریم:

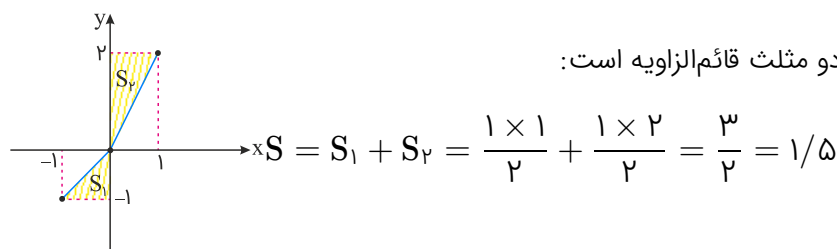
$$g(x) = -a|x - 2| - 1 \xrightarrow{g(0) = -\frac{7}{3}} g(0) = -2a - 1 = -\frac{7}{3} \Rightarrow -2a = -\frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{2}{3}|x - 2| - 1 \Rightarrow g(5) = -\frac{2}{3}|5 - 2| - 1 = -3$$

ابتدا باید با قرینه کردن نمودار $f(x)$ نسبت به خط $y = x$ ، نمودار $f^{-1}(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور، راحت‌تر است که نقاط متناظر با نقاط مشخص شده در نمودار f را در نمودار f^{-1} پیدا کرده و به هم وصل کنیم:



در قدم بعدی، با یک واحد انتقال افقی نمودار $f^{-1}(x)$ به سمت چپ، نمودار $f^{-1}(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



واضح است که ناحیه ایجاد شده با محور y ها، شامل دو مثلث قائم‌الزاویه است:

ابتدا با داشتن زوج مرتب‌های تابع f ، توابع f^{-1} و f^2 را می‌سازیم. داریم:

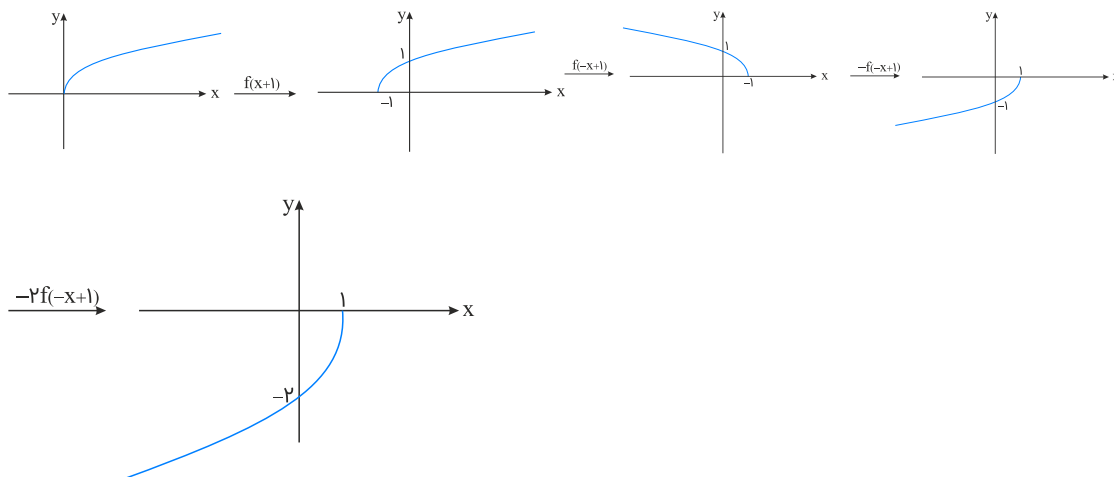
$$f^2 = \{(-1, 4), (2, 0), (0, 1), (1, 1)\} \quad , \quad f^{-1} = \{(2, -1), (0, 2), (-1, 0), (1, 1)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(f^2(-1)) = f^{-1}(4) \quad \times \\ f^{-1}(f^2(2)) = f^{-1}(0) = 2 \\ f^{-1}(f^2(0)) = f^{-1}(1) = 1 \\ f^{-1}(f^2(1)) = f^{-1}(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \circ f^2 = \{(2, 2), (0, 1), (1, 1)\}$$

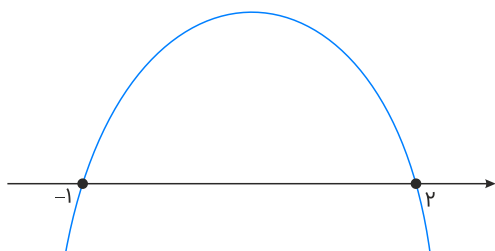
مجموع اعضای برد تابع $f^{-1} \circ f^2$ برابر است با:

$$2 + 1 + 1 = 4$$

باید ببینیم با چه تغییرهایی نمودار $f(x)$ به نمودار $g(x)$ تبدیل شده است. اینکه نمودار هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه شده است، مقداری کار را سخت می‌کند. نمودار f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم $(f(x+1))$ و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم $(f(-x+1))$. نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده $(-f(-x+1))$ و سپس عرض همه نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم $(-2f(-x+1))$.



برای تعیین دامنه تابع f داریم: $-x^2 + ax + b \geq 0$
 قرار است مجموعه جواب این نامعادله به صورت $[-1, 2]$ باشد، پس:



واضح است که -1 و 2 باید صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = -x^2 + ax + b$ باشند، پس:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + b = 0 \Rightarrow -a + b = 1$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow -4 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 4$$

پس از حل دستگاه داریم: $a = 1$ و $b = 2$. حال از آنجا که دامنه تابع g به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ ، یعنی $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ است، پس 1 و 2 ریشه‌های مخرج تابع g هستند:

$$2x^2 - cx + d = 0 \xrightarrow{x=1} 2 - c + d = 0 \Rightarrow c - d = 2$$

$$\xrightarrow{x=2} 8 - 2c + d = 0 \Rightarrow 2c - d = 8$$

با حل دستگاه داریم: $d = 4$ و $c = 6$ ، پس:

$$d - ac = 4 - (1)(6) = -2$$

تلاقی یک تابع خطی با وارونش حتماً روی خط $y = x$ است. می‌دانیم که کلیه نقاط روی این خط دارای طول و عرض برابرند. پس امکان ندارد که تلاقی یک تابع خطی با وارونش، نقطه‌ای باشد که عرض آن دو برابر طولش است، مگر آنکه طول و عرض این نقطه، هر دو صفر باشند یعنی خط موردنظر از مبدأ مختصات بگذرد. برای این منظور باید b لزوماً برابر صفر شود. اما دقت کنید از کنار a بی‌تفاوت نگذرید. a حتماً باید مخالف صفر باشد چون در غیر این صورت تابع خطی $y = ax + b$ به صورت تابع ثابت $y = b$ درمی‌آید و اصلاً یک‌به‌یک نیست که بخواهد وارون‌پذیر شود. پس a هر مقداری به جز صفر می‌تواند باشد، یعنی برای a سه مقدار 1 ، 2 و -1 و برای b فقط یک مقدار وجود دارد.

توجه: دقت کنید در حالتی که $y = x$ شود، تابع و وارونش روی یکدیگر قرار می‌گیرند و بی‌شمار جواب دارد؛ پس حالتی که عرض نقطه، دو برابر طولش است، یک حالت خاص از بی‌شمار جواب است و فقط در مبدأ اتفاق می‌افتد.

دقت کنید که توابع f و g در بازه $[a, b]$ همواره مثبت هستند اما f نزولی و g صعودی است. بنابراین با فرض $x_1 > x_2$ داریم:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ و } g(x_1) > g(x_2) \text{ و در نتیجه:}$$

$$g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{g(x_1), g(x_2) > 0} \frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}$$

$$\xrightarrow{f(x_1) < f(x_2)} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)}$$

پس با فرض $x_1 > x_2$ به $\frac{f}{g}(x_1) < \frac{f}{g}(x_2)$ رسیده‌ایم، یعنی تابع $\frac{f}{g}$ اکیداً نزولی است.